

Wahrscheinlichkeit

Eine begleitete Einführung in Ereignisse, bedingtes Denken und Zufallsvariablen

Ratiomera Statistics

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung der Kursseite	2
Annahmen und praktische Prüfungen	3
Was du jetzt kannst	3
Definitionen und Kernkonzepte	4
Wahrscheinlichkeitsregeln	5
Zufallsvariablen und Verteilungen	5
Die Binomialverteilung	5
Die Normalverteilung und Stichprobenziehung	6
Erweiterte Referenz	7
Zweck und Grundlagen	7
Zentrale Ideen	7
Formelleitfaden	8
Die erklärende Abbildung lesen	11
Checkliste zur Interpretation	11
Verbindung zu anderen Themen	12

Zusammenfassung der Kursseite

Wahrscheinlichkeit ist die formale Sprache zur Quantifizierung der Unsicherheit. Die frequentistische Interpretation verwendet eine langfristige relative Häufigkeit, die klassische Definition gilt für gleichwahrscheinliche Ergebnisse und die subjektive Interpretation stellt einen Grad an Überzeugung dar.

Die Komplement-, Additions- und Multiplikationsregeln bilden ein konsistentes System zur Verknüpfung von Ereigniswahrscheinlichkeiten. Die bedingte Wahrscheinlichkeit und der Satz von Bayes beschreiben, wie Evidenz Wahrscheinlichkeiten verändert. Dies lässt sich unmittelbar auf diagnostische Tests und die Berücksichtigung von Basisraten anwenden.

Zufallsvariablen formalisieren numerische Ergebnisse. Diskrete Variablen werden durch Wahrscheinlichkeitsfunktionen beschrieben, stetige Variablen durch Dichtefunktionen, wobei Wahrscheinlichkeiten Flächen über Intervallen entsprechen. Die Binomial- und die Normalverteilung sind zwei wichtige Modelle. z-Werte verbinden eine Normalverteilung mit einer gemeinsamen Referenzskala.

Stichprobenverteilungen beschreiben, wie Statistiken über wiederholte Stichproben variieren. Der Standardfehler des Mittelwerts nimmt mit wachsender Stichprobengrösse ab. Bei Unabhängigkeit und endlicher Varianz kann der zentrale Grenzwertsatz für ausreichend grosse Stichproben eine Normalnäherung rechtfertigen. Wie gross dafür ausreichend ist, hängt von der Form der Grundgesamtheit und von der Analyse ab. Grössere Präzision garantiert zudem keine Repräsentativität, denn Unterabdeckung, Selbstselektion und Nichtantwort können selbst eine sehr grosse Stichprobe verzerren.

Annahmen und praktische Prüfungen

Tabelle 1: Annahmen und Prüfungen für die wichtigsten Wahrscheinlichkeitswerkzeuge.

Modell oder Berechnung	Was erfüllt sein muss	Praktische Prüfung
Klassische Wahrscheinlichkeit	Die aufgeführten Ergebnisse sind tatsächlich gleich wahrscheinlich	Begründe die Gleichwahrscheinlichkeit mit dem Design und nicht mit Bequemlichkeit
Bedingte Wahrscheinlichkeit	Das bedingende Ereignis besitzt eine positive Wahrscheinlichkeit	Nenne die eingeschränkte Gruppe und verwende ihre Grösse als Nenner
Binomialverteilung	Festes n , zwei Ergebnisse pro Versuch, konstantes π und unabhängige Versuche	Prüfe das Design, bevor du die Formel anwendest
Normalmodell	Die modellierte Verteilung wird durch eine Normalkurve ausreichend gut angenähert	Prüfe Form, Grenzen, Mischungen und ungewöhnliche Beobachtungen
Standardfehler und zentraler Grenzwertsatz	Unabhängige Stichprobenziehung oder ein geeignetes Design, endliche Varianz und genügend Information für die Näherung	Untersuche den Stichprobenprozess und die Populationsform, nicht nur die Stichprobengrösse

Was du jetzt kannst

Du kannst gewöhnliche Fragen zur Unsicherheit in Ereignisnotation übersetzen, die passende Wahrscheinlichkeitsregel auswählen und anwenden, mit diskreten und stetigen Wahrscheinlichkeitsmodellen arbeiten, Normalwerte standardisieren und erklären, was Stichprobenverteilungen und Standardfehler über die Variation wiederholter Stichproben aussagen. Du kannst auch die Annahmen hinter diesen Werkzeugen nennen, erkennen, wann eine Rechnung nur eine Näherung ist, und erklären, weshalb eine präzise Schätzung durch die Art der Stichprobenauswahl trotzdem verzerrt sein kann.

Definitionen und Kernkonzepte

Tabelle 2: Zentrale Konzepte der Wahrscheinlichkeit und Stichprobenziehung.

Begriff	Definition
Ergebnisraum (Ω)	Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments
Ereignis (A)	Beliebige Teilmenge des Ergebnisraums
Komplement (A')	Alle Ergebnisse in Ω , die nicht in A liegen
Klassische Wahrscheinlichkeit	$P(A) = m/n$, wobei m die Anzahl günstiger Ergebnisse und n die Gesamtzahl gleich wahrscheinlicher Ergebnisse bezeichnet
Frequentistische Wahrscheinlichkeit	Langfristige relative Häufigkeit über viele Wiederholungen
Einander ausschliessend	Zwei Ereignisse, die nicht beide eintreten können ($A \cap B = \emptyset$)
Unabhängig	$P(A \cap B) = P(A)P(B)$: Das Auftreten des einen ändert nicht die Wahrscheinlichkeit des anderen
Grundgesamtheit	Alle potenziell beobachtbaren Einheiten mit dem interessierenden Merkmal
Stichprobe	Eine aus der Grundgesamtheit gezogene Teilmenge
Einfache Zufallsstichprobe	Jede mögliche Stichprobe einer festen Grösse hat dieselbe Auswahlwahrscheinlichkeit
Auswahlrahmen	Die operative Liste oder der Mechanismus, über den Einheiten der Grundgesamtheit ausgewählt werden können
Parameter	Eine feste, gewöhnlich unbekannte Populationsgrösse wie μ oder π
Statistik	Eine aus einer Stichprobe berechnete Grösse wie $\bar{x}$ oder $\hat{p}$, die zwischen Stichproben variiert
Auswahlverzerrung	Systematischer Fehler, wenn Einschluss oder Antwort mit der geschätzten Grösse zusammenhängt

Wahrscheinlichkeitsregeln

Tabelle 3: Wahrscheinlichkeitsregeln und ihre Verwendungen.

Regel	Formel	Verwendung
Komplement	$P(A') = 1 - P(A)$	Berechnung der Wahrscheinlichkeit des gegenteiligen Ereignisses
Addition (disjunkt)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Ereignisse können nicht gemeinsam eintreten
Addition (allgemein)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Ereignisse können gemeinsam eintreten
Viele disjunkte Ereignisse	$P(A_1 \cup \dots \cup A_k) = \sum P(A_i)$	Alle Ereignispaare sind disjunkt
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P(A B) = P(A \cap B) / P(B)$	Wahrscheinlichkeit von A , wenn B eingetreten ist
Multiplikation (allgemein)	$P(A \cap B) = P(A B) \cdot P(B)$	Ermittlung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit
Multiplikation (unabhängig)	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	Wenn Ereignisse unabhängig sind
Satz von Bayes	$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B A) \cdot P(A) + P(B A') \cdot P(A')}$	Aktualisierung der Wahrscheinlichkeit mit neuen Erkenntnissen

Zufallsvariablen und Verteilungen

Tabelle 4: Objekte diskreter und stetiger Verteilungen.

	Diskret	Stetig
Werte	Abzählbar (0, 1, 2, ...)	Jeder Wert in einem Bereich
Beschrieben durch	Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(X = x)$	Dichtefunktion $f(x)$
Erwartungswert	$E(X) = \sum x \cdot P(X = x)$	$E(X) = \mu$
Varianz	$\text{Var}(X) = \sum (x - E(X))^2 \cdot P(X = x)$	$\text{Var}(X) = \sigma^2$
CDF	$F(x) = P(X \leq x)$, Summe bis x	$F(x) = P(X \leq x)$, Fläche bis x
Zentrales Beispiel	Binomialverteilung $B(n, \pi)$	Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$

Die Binomialverteilung

Tabelle 5: Referenz zum Binomialmodell.

Eigenschaft	Formel	Interpretation
Schreibweise	$X \sim B(n, \pi)$	n Versuche, Erfolgswahrscheinlichkeit π pro Versuch
Wahrscheinlichkeitsfunktion	$P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$	Wahrscheinlichkeit von genau x Erfolgen
Erwartungswert	$E(X) = n\pi$	Langfristige durchschnittliche Anzahl an Erfolgen
Varianz	$\text{Var}(X) = n\pi(1 - \pi)$	Streuung der Verteilung
Symmetrisch nur, wenn	$\pi = 0.5$	Ansonsten schief

Die Normalverteilung und Stichprobenziehung

Tabelle 6: Referenz zum Normalmodell und zu Stichprobenverteilungen.

Eigenschaft	Formel oder Wert	Interpretation
Normalverteilung	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$	Gekennzeichnet durch Mittelwert und Varianz
Empirische Regel: $\mu \pm \sigma$	$\approx 68\%$	Die meisten Werte liegen in der Nähe der Mitte
Empirische Regel: $\mu \pm 2\sigma$	$\approx 95\%$	Sehr wenige Werte liegen mehr als zwei Standardabweichungen entfernt
Empirische Regel: $\mu \pm 3\sigma$	$\approx 99.7\%$	Extremwerte sind sehr selten
z-Wert	$z = (x - \mu) / \sigma$	Standardisierter Abstand vom Mittelwert
Standardnormalverteilung	$Z \sim N(0, 1)$	Referenz nach der z-Transformation
Standardfehler	$SE = \sigma / \sqrt{n}$	Präzision des Stichprobenmittelwerts
Zentraler Grenzwertsatz	$\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ für grosse n	Stichprobenmittelwerte sind annähernd normalverteilt

Erweiterte Referenz

Zweck und Grundlagen

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet eine Sprache für Situationen, in denen ein Ergebnis nicht im Voraus bekannt ist. Der **Ergebnisraum**, meist als Ω geschrieben, ist die Menge aller betrachteten möglichen Ergebnisse. Ein **Ereignis** ist eine Sammlung von Ergebnissen aus diesem Ergebnisraum. Ein einzelnes Ergebnis gehört entweder zum Ereignis oder nicht. Diese Sichtweise mit Mengen ist wichtig, weil Wahrscheinlichkeitsregeln zuerst auf Ereignisse und erst danach auf Zahlen angewendet werden.

Stelle dir vor, dass ein beschriftetes Plättchen aus den Zahlen 1 bis 10 gezogen wird. Der Ergebnisraum lautet $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$. Das Ereignis A könnte die Plättchen 1, 2 und 3 enthalten, während das Ereignis D die Plättchen 2, 3 und 7 enthält. Eine Wahrscheinlichkeit ordnet jedem Ereignis eine Zahl zwischen 0 und 1 zu. Null bedeutet, dass das Ereignis innerhalb des angegebenen Ergebnisraums nicht eintreten kann. Eins bedeutet, dass es eintreten muss. Werte zwischen null und eins drücken Grade der Unsicherheit unter dem verwendeten Modell aus.

Wahrscheinlichkeit kann über gleich wahrscheinliche Ergebnisse, langfristige relative Häufigkeiten oder ein festgelegtes Modell erschlossen werden. Bei jedem dieser Zugänge definierst du den Vorgang und den Ergebnisraum vor der Berechnung. Eine Wahrscheinlichkeit ist nie von ihren Bedingungen losgelöst. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses kann sich ändern, wenn du neue Informationen erhältst, wenn sich das Auswahlverfahren ändert oder wenn sich die betrachtete Grundgesamtheit ändert.

Mengenidee	Notation	Bedeutung in Worten
Vereinigung	$A \cup D$	Ergebnisse in A , in D oder in beiden
Schnitt	$A \cap D$	Ergebnisse, die sowohl zu A als auch zu D gehören
Komplement	A^c	Ergebnisse im Ergebnisraum, die nicht zu A gehören
Disjunkte Ereignisse	$A \cap B = \emptyset$	Ereignisse ohne gemeinsames Ergebnis

Zentrale Ideen

Die Komplementregel ist nützlich, wenn sich das Gegenereignis leichter zählen lässt. Die Additionsregel verhindert, dass die Überlappung zweier Ereignisse doppelt gezählt wird. Die bedingte Wahrscheinlichkeit verkleinert die Bezugsmenge: $P(A | D)$ fragt nach der Wahrscheinlichkeit von A unter den Situationen, in denen D bekanntermassen eingetreten ist. Der senkrechte Strich wird als «gegeben» oder «unter der Bedingung» gelesen. Der Nenner ist deshalb die Wahrscheinlichkeit der Bedingung und nicht die Wahrscheinlichkeit des vollständigen Ergebnisraums.

Unabhängigkeit hat eine genaue Bedeutung. Die Ereignisse A und D sind unabhängig, wenn die Information, dass D eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeit von A nicht verändert. Dies ist nicht dasselbe wie Disjunktheit. Wenn zwei Ereignisse disjunkt sind und eines eintritt, kann das andere nicht eintreten. Diese Information verändert also seine Wahrscheinlichkeit. Abgesehen von besonderen Fällen mit Wahrscheinlichkeit null sind disjunkte Ereignisse nicht unabhängig.

Der Satz von Bayes kehrt eine bedingte Wahrscheinlichkeit um. Er verbindet die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses unter einer Bedingung mit der vorherigen Häufigkeit dieser Bedingung.

Basisraten sind wichtig: Selbst ein Ergebnis, das in einer Gruppe häufiger vorkommt, kann nur mit einer mässigen Wahrscheinlichkeit für die Zugehörigkeit zu dieser Gruppe sprechen, wenn die Gruppe selten ist. Schreibe jedes Ereignis in Worten auf, bevor du Zahlen einsetzt. So bleibt die Richtung der Bedingung sichtbar.

Eine **Zufallsvariable** ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsvorgangs einen numerischen Wert zu. Eine diskrete Zufallsvariable besitzt getrennte, abzählbare Werte, etwa die Anzahl Antworten mit hoher Prüfungsangst in einer Gruppe. Eine stetige Zufallsvariable kann Werte über ein Intervall hinweg annehmen, etwa einen gemessenen Punktwert. Eine diskrete Wahrscheinlichkeitsfunktion weist einzelnen Werten Wahrscheinlichkeiten zu. Eine stetige Wahrscheinlichkeitsdichte beschreibt, wie sich Wahrscheinlichkeit über Intervalle verteilt. Die Wahrscheinlichkeit eines Intervalls wird durch die Fläche unter der Dichtekurve dargestellt.

Modell oder Idee	Was beschrieben wird	Zentrale Lesefrage
Binomialverteilung	Anzahl Erfolge bei einer festen Zahl unabhängiger Versuche mit konstanter Erfolgswahrscheinlichkeit	Sind die feste Versuchszahl, zwei Ergebnisse, Unabhängigkeit und konstante Wahrscheinlichkeit vertretbar?
Normalverteilung	Ein symmetrisches glockenförmiges Modell, das durch Mittelwert und Standardabweichung beschrieben wird	Passt das Modell zur Variable und zur gestellten Frage?
Stichprobenverteilung	Wie ein Stichprobenkennwert über wiederholte Stichproben aus demselben Vorgang variiert	Wie viel Unsicherheit von Stichprobe zu Stichprobe ist zu erwarten?
Erwartungswert	Das mit Wahrscheinlichkeiten gewichtete langfristige Zentrum einer Zufallsvariablen	Welcher Durchschnitt würde sich bei vielen Wiederholungen des Modells ergeben?

Eine Stichprobenverteilung ist nicht die Verteilung einzelner Werte. Sie ist die Verteilung eines Stichprobenkennwerts, beispielsweise eines Stichprobenmittelwerts, über hypothetisch wiederholte Stichproben. Ihre Streuung wird durch einen **Standardfehler** gemessen. Grössere Stichproben führen normalerweise zu weniger variablen Stichprobenmittelwerten, wenn der zugrunde liegende Vorgang gleich bleibt. Diese Idee verbindet die Wahrscheinlichkeitsrechnung mit Konfidenzintervallen und Hypothesentests.

Formelleitfaden

Für ein beliebiges Ereignis A enthält das Komplement alle Ergebnisse ausserhalb von A . Die beiden Wahrscheinlichkeiten addieren sich zu eins:

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

Bei zwei Ereignissen addierst du ihre Wahrscheinlichkeiten und ziehst ihre Überlappung einmal ab. Diese Subtraktion berichtigt die doppelte Zählung, die entsteht, wenn die gemeinsamen Ergebnisse in den ersten beiden Termen enthalten sind:

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$

Sind die Ereignisse disjunkt, ist ihre Schnittmenge leer und der Term für die Überlappung beträgt null. Verwende die verkürzte Additionsregel für disjunkte Ereignisse erst, wenn der Ergebnisraum bestätigt, dass beide Ereignisse nicht gemeinsam eintreten können.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit beschränkt die Betrachtung auf die Bedingung D . Dafür muss $P(D) > 0$ gelten:

$$P(A | D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

Die Multiplikationsregel folgt aus demselben Zusammenhang. Sie zeigt auch die Bedingung für Unabhängigkeit. Sind A und D unabhängig, gilt $P(A | D) = P(A)$ und ihre gemeinsame Wahrscheinlichkeit lässt sich als Produkt schreiben:

$$P(A \cap D) = P(A | D)P(D) = P(A)P(D)$$

Der Satz von Bayes kehrt die Bedingung um, indem dasselbe gemeinsame Ereignis in der anderen Richtung verwendet wird:

$$P(A | D) = \frac{P(D | A)P(A)}{P(D)}$$

Wenn A und A^c alle Möglichkeiten abdecken, lässt sich der Nenner mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit bilden:

$$P(D) = P(D | A)P(A) + P(D | A^c)P(A^c).$$

Dieser Nenner hält die Basisrate sichtbar. Eine Tabelle mit natürlichen Häufigkeiten drückt dieselbe Aktualisierung durch Anzahlen aus. Sie ist oft der sicherste Weg, Sensitivität, Falsch-positiv-Wahrscheinlichkeit und die Wahrscheinlichkeit von A nach der Beobachtung von D auseinanderzuhalten.

Bei einer diskreten Zufallsvariablen ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion $p(x) = P(X = x)$ und die Verteilungsfunktion lautet

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{u \leq x} p(u).$$

Sind $x_1, \dots, x_m$ die möglichen Werte, lauten Erwartungswert und Varianz

$$E(X) = \sum_{j=1}^m x_j p(x_j), \quad \text{Var}(X) = \sum_{j=1}^m (x_j - E(X))^2 p(x_j).$$

Der Erwartungswert ist das langfristige, mit Wahrscheinlichkeiten gewichtete Zentrum des Modells. Er ist keine Zusicherung, dass eine einzelne Beobachtung genau diesen Wert annimmt.

Bei einer stetigen Zufallsvariablen mit Dichte f entspricht Wahrscheinlichkeit der Fläche unter der Dichte über einem Intervall. Die Verteilungsfunktion gibt diese Intervallwahrscheinlichkeit ohne Integralnotation an:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Die Höhe einer Dichte ist nicht selbst eine Wahrscheinlichkeit. Bei einem stetigen Modell gilt für einen einzelnen exakten Punkt $P(X = x) = 0$.

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit n Versuchen und Erfolgswahrscheinlichkeit p beträgt die Wahrscheinlichkeit von genau k Erfolgen:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

Der Koeffizient $\binom{n}{k}$ zählt, wie viele Versuchsfolgen genau k Erfolge enthalten. Verwende dieses Modell erst, nachdem du seine Voraussetzungen geprüft hast. Die Tatsache, dass das Ergebnis eine Anzahl ist, reicht dafür nicht aus.

Für die Binomialverteilung gilt ausserdem

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p).$$

Eine obere Wahrscheinlichkeit wie $P(X > k)$ kann über ihr Komplement $1 - P(X \leq k)$ berechnet werden. Das Modell setzt eine feste Zahl von Versuchen, zwei Ergebnisse pro Versuch, ein konstantes p und unabhängige Versuche voraus.

Bei einer normalverteilten Variablen $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ standardisierst du eine Grenze mit

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Für untere Verteilungsschwänze gilt $P(X \leq x) = \Phi(z)$, für obere $1 - \Phi(z)$. Bei einem Intervall wird eine kumulierte Fläche von der anderen abgezogen. Eine inverse Frage beginnt mit einer kumulierten Wahrscheinlichkeit q , bestimmt $z_q = \Phi^{-1}(q)$ und kehrt mit $x_q = \mu + z_q \sigma$ zur ursprünglichen Skala zurück.

Für unabhängige Beobachtungen mit Populationsmittelwert μ und Populationsvarianz σ^2 gilt für die Stichprobenverteilung des Stichprobenmittelwerts

$$E(\bar{X}) = \mu, \quad \text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad SE(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Ist σ unbekannt, schätzt $s/\sqrt{n}$ den Standardfehler. Ist die Grundgesamtheit normalverteilt, ist auch der Stichprobenmittelwert exakt normalverteilt. Bei geeigneten nicht normalverteilten Grundgesamtheiten kann seine Verteilung mit wachsendem n annähernd normal werden. Die Güte dieser Annäherung hängt von der Form der Grundgesamtheit ab. Keine einzelne Grenze für die Stichprobengrösse garantiert sie.

Gegenstand	Was variiert	Zu berichtende Streuung
Verteilung einzelner Werte	Einzelne Beobachtungen	Populations- oder Stichprobenstandardabweichung
Stichprobenverteilung von $\bar{X}$	Stichprobenmittelwerte über wiederholte Stichproben	Standardfehler $\sigma/\sqrt{n}$ oder Schätzung $s/\sqrt{n}$
Verzerzte realisierte Stichprobe	Fälle, die durch einen ungeeigneten Auswahlrahmen oder Antwortprozess aufgenommen wurden	Ein kleinerer Standardfehler behebt keine Auswahlverzerrung

Die erklärende Abbildung lesen

Vier Ereignisoperationen im selben Ergebnisraum

Die hervorgehobenen Felder zeigen, welche Ergebnisse zum genannten Ereignis gehören

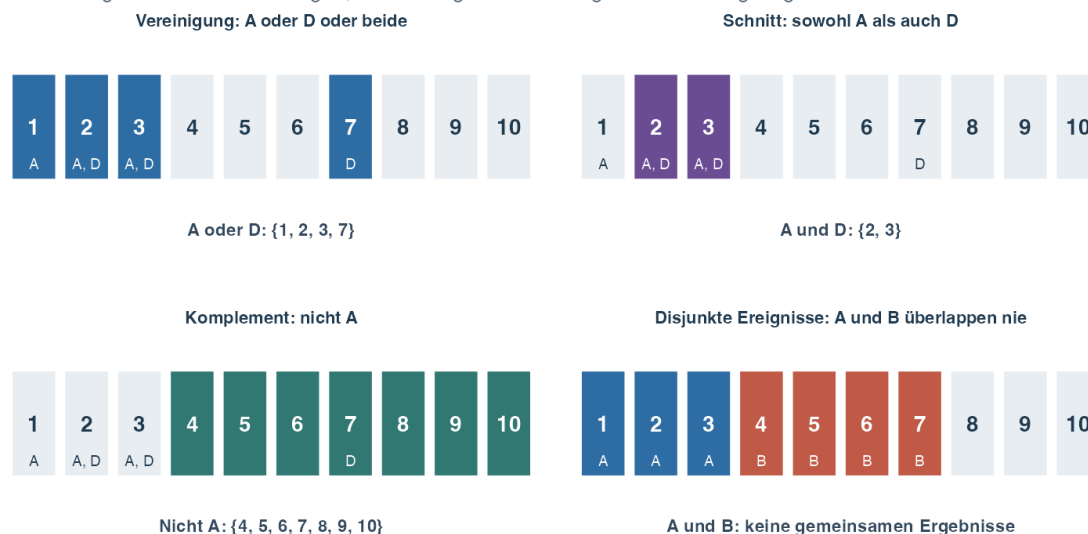


Abbildung 1: Vier Felder verwenden nummerierte Plättchen, um Vereinigung, Schnitt, Komplement und disjunkte Ereignisse im selben Ergebnisraum mit zehn Ergebnissen zu zeigen.

Beginne mit dem Feld oben links. Das Ereignis A enthält 1, 2 und 3, während das Ereignis D die Zahlen 2, 3 und 7 enthält. Ihre Vereinigung hebt 1, 2, 3 und 7 hervor, weil «oder» sowohl Ergebnisse aus einem der beiden Ereignisse als auch gemeinsame Ergebnisse einschliesst. Das Feld oben rechts zeigt den Schnitt. Nur 2 und 3 sind hervorgehoben, weil dies die gemeinsamen Ergebnisse sind.

Das Feld unten links zeigt das Komplement von A . Die Plättchen 4 bis 10 sind hervorgehoben, weil jedes Ergebnis im Ergebnisraum entweder zu A oder ausserhalb von A liegen muss. Das Feld unten rechts führt das Ereignis B mit den Zahlen 4, 5, 6 und 7 ein. A und B enthalten kein gemeinsames Plättchen und sind daher disjunkt. Die Farben zeigen die Mengenzugehörigkeit und nicht die Grösse einer Wahrscheinlichkeit. Wären die zehn Plättchen gleich wahrscheinlich, könnte die Anzahl der hervorgehobenen Plättchen durch zehn geteilt werden. Wären die Ergebnisse nicht gleich wahrscheinlich, würde das Zählen nicht genügen. Dann wären die zugeordneten Wahrscheinlichkeiten erforderlich.

Die Abbildung hilft dir, die Notation vor der Verwendung einer Formel zu prüfen. Bestimme zuerst die relevanten Plättchen und übersetze diese Menge danach in eine Wahrscheinlichkeit. Diese Reihenfolge verringert häufige Fehler: «oder» wird nicht versehentlich ausschliessend verstanden, die Überlappung in der Additionsregel wird nicht vergessen und Disjunktheit wird nicht mit Unabhängigkeit verwechselt.

Checkliste zur Interpretation

Definiere den Zufallsvorgang, den Ergebnisraum und jedes Ereignis in Worten. Prüfe, ob die Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, bevor du Anzahlen verwendest. Benenne bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit die Bedingung und verwende sie als Bezugsgruppe. Zeichne eine Menge, eine Tabelle oder einen Wahrscheinlichkeitsbaum, wenn dir die Richtung einer Bedingung unsicher erscheint. Unterscheide disjunkte von unabhängigen Ereignissen. Gib bei einer Zufallsvariablen an, ob sie diskret oder stetig ist und was ein einzelner Wert bedeutet.

Stimme bei der Wahl einer Verteilung ihre Voraussetzungen auf den Vorgang ab. Gib an, ob eine Wahrscheinlichkeit aus einem theoretischen Modell, einer beobachteten relativen Häufigkeit oder einer Simulation stammt. Eine Simulation nähert die Folgen ihrer festgelegten Regeln an. Sie kann ungeeignete Annahmen nicht korrigieren. Halte bei einer Stichprobenverteilung einzelne Beobachtungen und Stichprobenkennwerte auseinander und benenne, was sich über wiederholte Stichproben verändern würde.

Verbindung zu anderen Themen

Die deskriptive Statistik fasste den beobachteten Datensatz zusammen. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschreibt nun, wie Ergebnisse unter einem Zufallsvorgang variieren könnten. Die statistische Inferenz verbindet beide Ideen: Sie verwendet die Stichprobenverteilung eines Stichprobenkennwerts, um die Vereinbarkeit eines beobachteten Ergebnisses mit einer Aussage über die Grundgesamtheit zu beurteilen und die Unsicherheit einer Schätzung auszudrücken.

Auch spätere Modelle beruhen auf Wahrscheinlichkeit. Ein Korrelations- oder Regressionskoeffizient verändert sich von Stichprobe zu Stichprobe. Konfidenzintervalle und Tests beschreiben diese Streuung mit Wahrscheinlichkeitsmodellen. Die Varianzanalyse vergleicht systematische und verbleibende Variation mithilfe einer F -Verteilung. Die Notation wird umfangreicher, doch die Grundfragen bleiben vertraut: Welche Ergebnisse sind möglich, welche Bedingungen werden vorausgesetzt und welche Unsicherheit beschreibt die Wahrscheinlichkeit?

Dokument-ID: topic-02-probability-summary-de

Notizen 1 von 3

Wahrscheinlichkeit | Thema 2

Notizen 2 von 3

Wahrscheinlichkeit | Thema 2

Notizen 3 von 3

Wahrscheinlichkeit | Thema 2